# المحاضرة الثالثة عشر

? حالة التابعي $J$ تابع لـ $n$ تابعاً $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

اي ان التابعي $J$ من الشكل

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\,dx$$

في هذه الحالة الشروط التي تحققها $y_i$ كي يكون ~~الحد~~ للتابعي $J$ قيمة قصوى

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0 \qquad i=1,2,\dots,n$$

دراسة الحالة التي تكون التكامل حاوياً مشتقات للتابع المطلوب $y(x)$ من مرتبة اعلى من المرتبة الاولى (الحالة العامة)

ليكن لدينا التابعي $J$ المعطى بالعلاقة التالية

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\,dx \quad (1)$$

المطلوب ما هو الشرط الذي يجب ان يحققه التابع $y(x)$ كي يكون للتابعي $J$ قيمة قصوى

الحل: نأخذ اي تابع $\tau(x)$ بحيث هذا التابع ومشتقاته حتى المرتبة $(n-1)$ تنعدم في طرفي مجال التكامل $[x_0, x_1]$

وبالاضافة الى $y(x)$ الذي يجب ان يؤدي الى قيمة قصوى للتابعي $J$ فانا نشكل تابعاً جديداً

$$y(x)+\alpha\,\tau(x)$$

حيث $\alpha$ وسيط عددي صغير ان هذا التابع الجديد يحقق نفس الشروط الحدية التي يحققها $y(x)$

$$J(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\alpha\tau, y'+\alpha\tau', y''+\alpha\tau'', \dots, y^{(n)}+\alpha\tau^{(n)})\,dx \quad (2)$$

وبما ان $y(x)$ يعطي القيم القصوى للتابعي $J$ لذا فإن للتابع المعطى بالعلاقة (2) قيمة قصوى عندما $\alpha=0$ وبالتالي ينعدم مشتقه عندما $\alpha=0$. باشتقاق طرفي (2) بالنسبة لـ $\alpha$ مشيراً الى المشتقات بدلالة $\tau$ نحصل على التالي وبجعل $\alpha=0$

$$J'(0)=\int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\,\tau(x)\,dx$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\,\tau'(x)\,dx$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} F_{y''}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\,\tau''(x)\,dx+ \quad (3)$$

$$+\dots+\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\,\tau^{(n)}(x)\,dx$$

نحول جميع التكاملات في الطرف الايمن في العلاقة (3) ما عدا الاول منها وذلك عن طريق التكامل بالتجزئة مطبقاً عدة مرات

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(k)}}\,\tau^{(k)}(x)\,dx=\Big[F_{y^{(k)}}\,\tau^{(k-1)}(x)-\frac{d}{dx}F_{y^{(k)}}\,\tau^{(k-2)}(x)$$

$$+\dots+(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}F_{y^{(k)}}\,\tau(x)\Big]_{x=x_0}^{x=x_1}+$$

$$+(-1)^{k}\int_{x_0}^{x_1}\tau(x)\,\frac{d^{k}}{dx^{k}}F_{y^{(k)}}\,dx$$

ولما كان التابع $\eta(x)$ ومشتقاته تنعدم على طرفي المجال $[x_0, x_1]$ لذا فإن الحدود خارج إشارة التكامل في العلاقة الأخيرة تنعدم بالتالي نحصل على

$$J'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right] dx = 0$$

كي يكون للتابع $J$ قيمة قصوى يجب أن يكون [illegible]

$$F_y + \sum (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}} = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة $2n$ ولها حل عام يحوي $2n$ ثابتاً كيفياً.

**مثال**

$$F = \frac{1}{2}(y''^2 + y'^2)$$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0$$

$$F_y = 0 \qquad F_{y'} = y' \qquad F_{y''} = y''$$

$$-\frac{d}{dx} y' + \frac{d^2}{dx^2} y'' = 0$$

$$-y'' + y'''' = 0 \Rightarrow y'''' - y'' = 0$$

$$\rho^4 - \rho^2 = 0 \Rightarrow \rho^2(\rho^2 - 1) = 0$$

إما $\rho = 0$ أو $\rho = \pm 1$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{0x} + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x}$$

**حالة تكاملات مضاعفة (معادلة أوستروغرادسكي)**

$$J = \iint_B F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy \quad (1)$$

نعرف $B$ ساحة التكامل و $\ell$ محيط هذه الساحة

ما هو الشرط الذي يجب أن يحققه التابع $u(x, y)$ حتى يكون للتابعي قيمة قصوى

**الحل:**

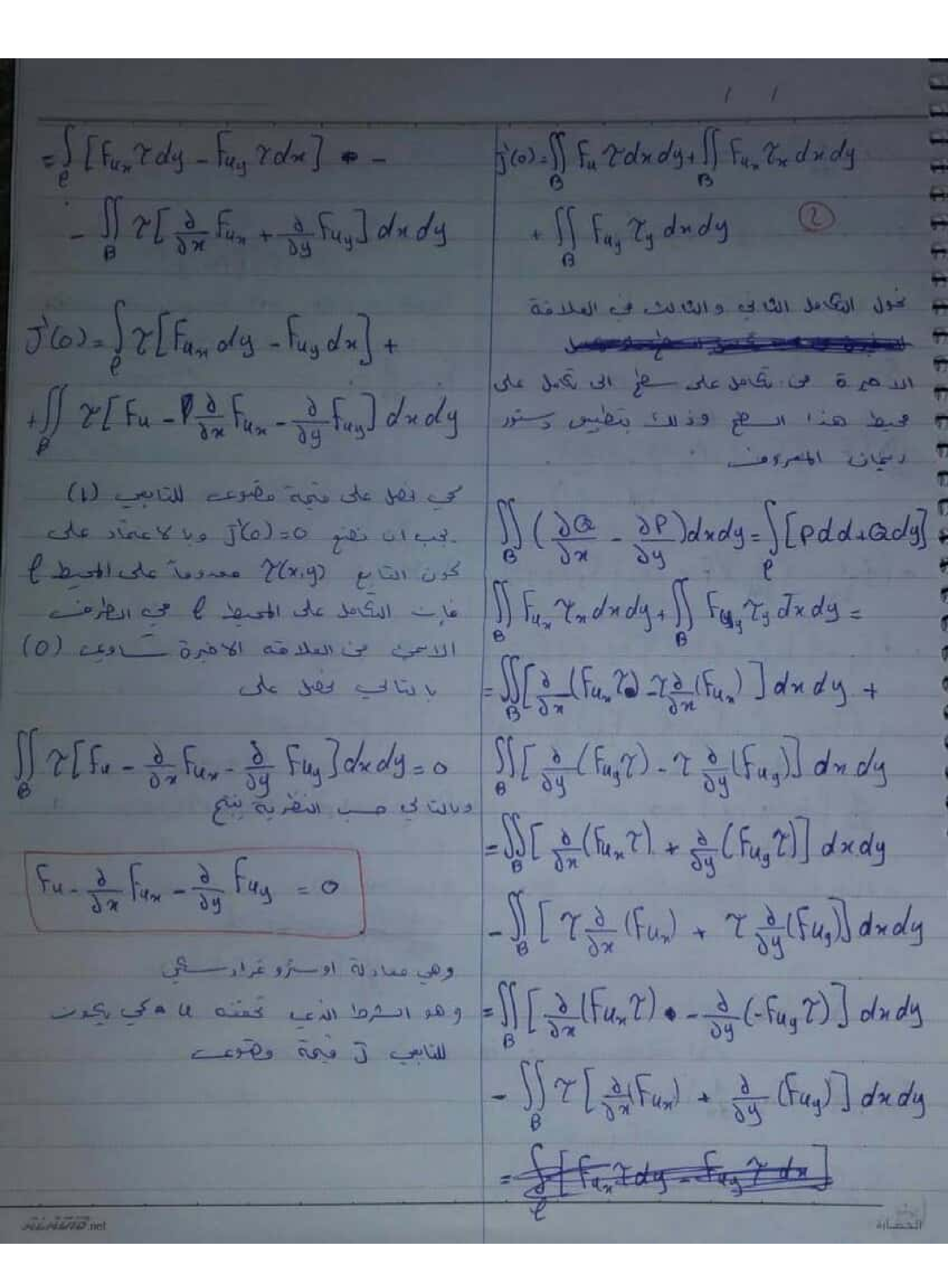
سوف نبحث عن التابع $u(x, y)$ المستمر مع مشتقاته حتى المرتبة الثانية في الساحة $B$ والذي يأخذ قيماً معينة على $\ell$ محيط هذه الساحة بالإضافة إلى أنه يعطي قيمة قصوى للتابعي (1)

نشكل التوابع المجاورة $u(x, y) + \alpha\, \eta(x, y)$ حيث $\eta(x, y)$ هو ومشتقاته ينعدم على المحيط $\ell$

بتعويض هذا التابع في التكامل (1) نحصل على

$$J(\alpha) = \iint_B F(x, y, u + \alpha\eta, u_x + \alpha\eta_x, u_y + \alpha\eta_y)\, dx\, dy$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة لـ $\alpha$ ثم نضع $\alpha = 0$ [illegible]



$$J'(0)=\iint_B F_u\,\tau\,dx\,dy+\iint_B F_{u_x}\tau_x\,dx\,dy+\iint_B F_{u_y}\tau_y\,dx\,dy \quad (2)$$

نحول التكامل الثاني والثالث في العلاقة

الاخيرة من تكامل على سطح الى تكامل على محيط هذا السطح وذلك بتطبيق دستور ريمان المعروف

$$\iint_B\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_\ell[P\,dx+Q\,dy]$$

$$\iint_B F_{u_x}\tau_x\,dx\,dy+\iint_B F_{u_y}\tau_y\,dx\,dy=$$

$$=\iint_B\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\tau)-\tau\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x})\right]dx\,dy+$$

$$\iint_B\left[\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\tau)-\tau\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y})\right]dx\,dy$$

$$=\iint_B\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\tau)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\tau)\right]dx\,dy$$

$$-\iint_B\left[\tau\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x})+\tau\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y})\right]dx\,dy$$

$$=\iint_B\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\tau)-\frac{\partial}{\partial y}(-F_{u_y}\tau)\right]dx\,dy$$

$$-\iint_B\tau\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x})+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y})\right]dx\,dy$$

~~$=\int_\ell[F_{u_x}\tau\,dy-F_{u_y}\tau\,dx]$~~

$$=\int_\ell[F_{u_x}\tau\,dy-F_{u_y}\tau\,dx]-$$

$$-\iint_B\tau\left[\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right]dx\,dy$$

$$J'(0)=\int_\ell\tau[F_{u_x}dy-F_{u_y}dx]+$$

$$+\iint_B\tau\left[F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right]dx\,dy$$

كي نحصل على قيمة قصوى للتابع (1) يجب ان نضع $J'(0)=0$ وبالاعتماد على كون التابع $\tau(x,y)$ معدوماً على المحيط $\ell$ فإن التكامل على المحيط $\ell$ في الطرف الايمن من العلاقة الاخيرة يساوي (0) بالتالي نحصل على

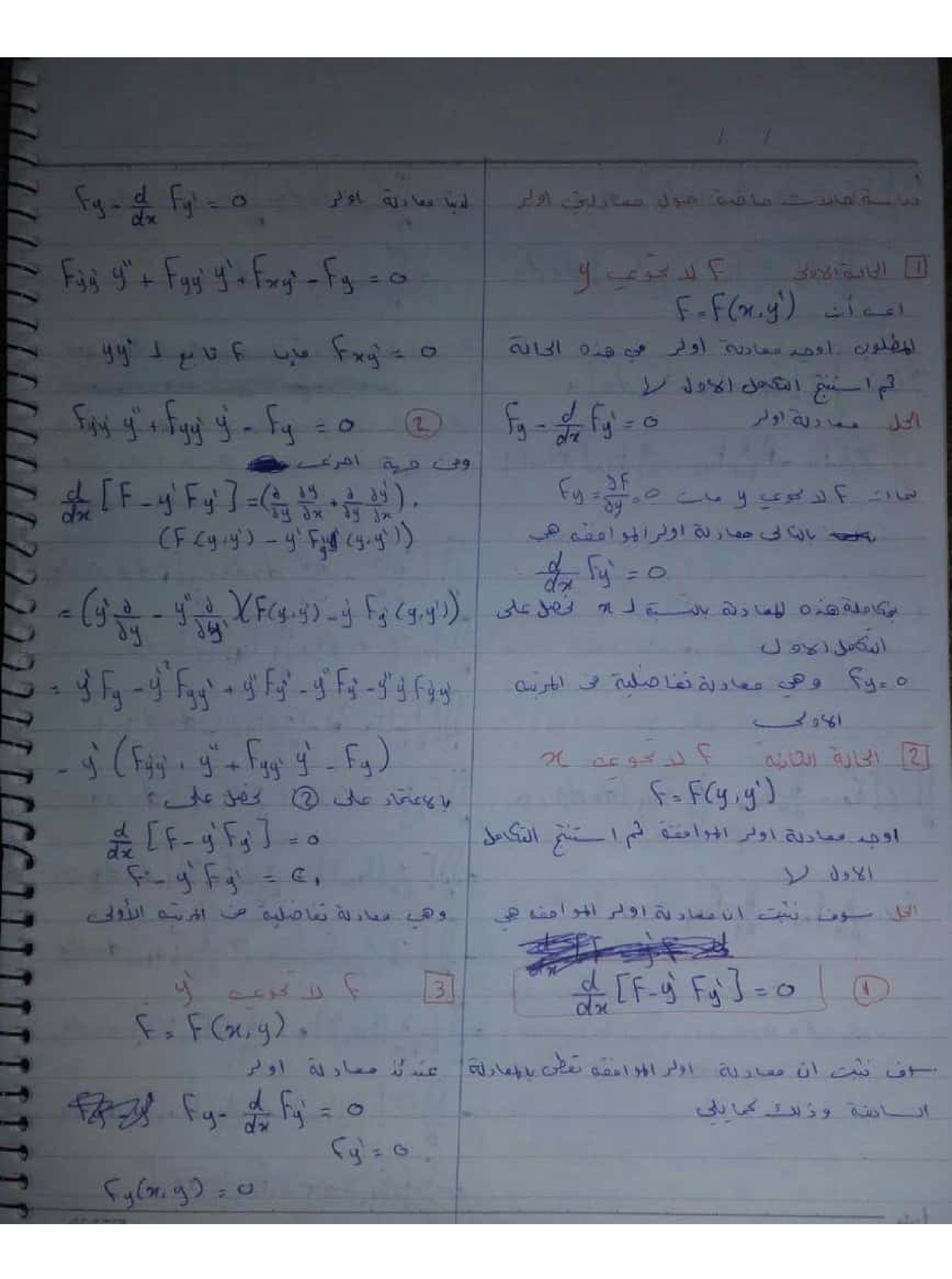
$$\iint_B\tau\left[F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right]dx\,dy=0$$

وبالتالي حسب النظرية ينتج

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0$$

وهي معادلة اوستروغرادسكي

وهو الشرط الذي تحققه $u$ كي يكون للتابع $J$ قيمة قصوى



حالات خاصة لحل معادلة اويلر

[1] الحالة الاولى F لا تحتوي y

اي أن $F=F(x,y')$

المطلوب اوجد معادلة اويلر في هذه الحالة ثم استنتج التكامل الاول لـ

الحل معادلة اويلر $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$

بما أن F لا تحتوي y فإن $F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

بالتالي معادلة اويلر المرافقة هي

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

بمكاملة هذه المعادلة بالنسبة لـ $x$ نحصل على التكامل الاول لـ

$F_{y'} = c$ وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى

[2] الحالة الثانية F لا تحتوي x

$$F = F(y,y')$$

اوجد معادلة اويلر المرافقة ثم استنتج التكامل الاول لـ

الحل سوف نثبت ان معادلة اويلر المرافقة هي

$$\frac{d}{dx}[F - y'F_{y'}] = 0 \quad (1)$$

سوف نثبت ان معادلة اويلر المرافقة تعطى بالمعادلة السابقة وذلك كما يلي

لدينا معادلة اويلر $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0$$

$F_{xy'} = 0$ بسبب F لا تحتوي x

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' - F_y = 0 \quad (2)$$

ومن جهة اخرى

$$\frac{d}{dx}[F - y'F_{y'}] = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}\right)\left(F(y,y') - y'F_{y'}(y,y')\right)$$

$$= \left(y'\frac{\partial}{\partial y} - y''\frac{\partial}{\partial y'}\right)\left(F(y,y') - y'F_{y'}(y,y')\right)$$

$$= y'F_y - y'^2F_{yy'} + y''F_{y'} - y''F_{y'} - y''y'F_{y'y'}$$

$$= -y'\left(F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' - F_y\right)$$

بالتعويض عن (2) نحصل على

$$\frac{d}{dx}[F - y'F_{y'}] = 0$$

$$F - y'F_{y'} = c_1$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى

[3] F لا تحتوي $y'$

$$F = F(x,y)$$

عندئذ معادلة اويلر

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_{y'} = 0$$

$$F_y(x,y) = 0$$

هذه العلاقة تعين منحنياً او عدة منحنيات لا نهائية من المنحنيات تابعة لا يمكن كما هي الحالة في اول المعادلة التفاضلية ملا يستطيع اذاً تحقيق عام تحقيق الشروط الحدية في هذه الحالة

**4 الحالة التي تصبح فيها معادلة اويلر متطابقة**

لنأخذ لدينا التابعي $J$

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

ونفرض ان

$$F(x,y,y') = A(x,y) + B(x,y)\, y' \quad (1)$$

ونفرض ان

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

مطلوب، اثبت ان معادلة اويلر تصبح متطابقة

الحل:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$F_{y'y'} \cdot y'' + F_{yy'} \cdot y' + F_{xy'} - F_y = 0$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y} \cdot y'$$

$$F_{yy'} = \frac{\partial}{\partial y'} F_y = \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = B(x,y)$$

$$F_{y'y'} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} = 0$$

$$F_{xy'} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} y' + \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial y} y' = 0$$

بجمع الحدود المتشابهة وبالاعتماد على العلاقة (2) نحصل على

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

ملاحظة التابعي

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\, dx$$

في هذه الحالة يكتب على الشكل التالي

$$J = \int_{\ell} [A(x,y)\, dx + B(x,y)\, dy]$$

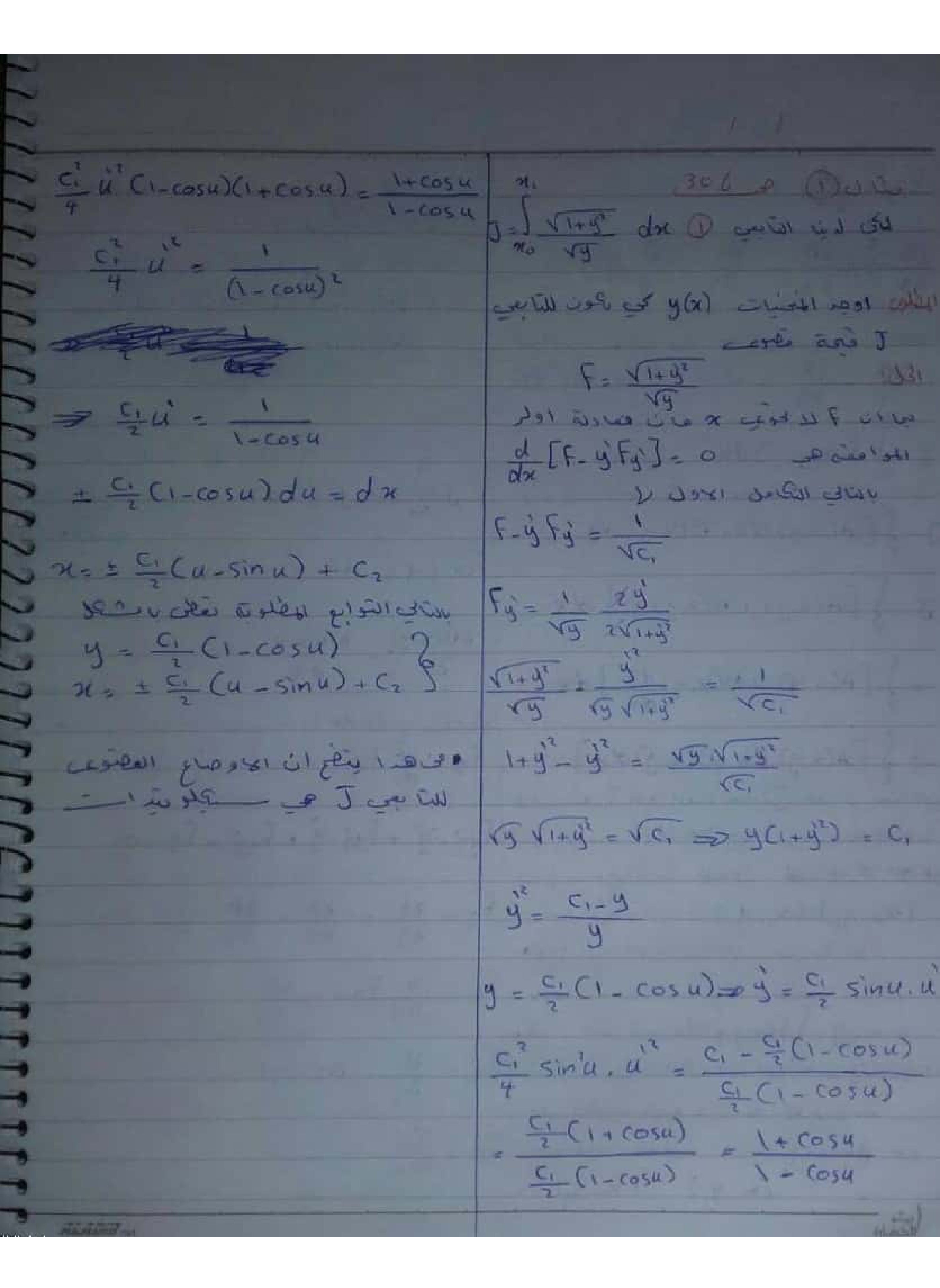
$$J = \int_{\ell} [A(x,y) + B(x,y)\, y']\, dx$$

$$= \int_{\ell} \left[A(x,y) + B(x,y) \frac{dy}{dx}\right] dx$$

$$= \int_{\ell} [A(x,y)\, dx + B(x,y)\, dy]$$

واستناداً الى العلاقة (2) فان التابعي $J$ لا يتعلق على الطريق اي ان له القيمة نفسها من اجل كل المنحنيات $\ell$ الواصل بين نقطتين $(x_0, y_0)$ $(x_1, y_1)$ ويرجع ذلك الى كون معادلة اويلر متطابقة

مثلاً لنأخذ لدينا $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\, dx$ نحقق الشروط السابقة اثبت ان التابعي $J$ لا يتعلق على الطريق اي ان له القيمة نفسها من اجل كل المنحنيات $\ell$ الواصل بين $(x_0, y_0)$ $(x_1, y_1)$



مثال (1) ص 306

لكن لدينا التابعي (1)

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

المطلوب: اوجد المنحنيات $y(x)$ كي يكون للتابعي $J$ قيمة قصوى

الحل:

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

بما أن $F$ لا تحوي $x$ صراحة فإن معادلة اولر الموافقة هي

$$\frac{d}{dx}[F-y'F_{y'}]=0$$

بالتالي التكامل الاول لها

$$F-y'F_{y'}=\frac{1}{\sqrt{c_1}}$$

$$F_{y'}=\frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{\sqrt{c_1}}$$

$$1+y'^2-y'^2=\frac{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{c_1}}$$

$$\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{c_1}\Rightarrow y(1+y'^2)=c_1$$

$$y'^2=\frac{c_1-y}{y}$$

$$y=\frac{c_1}{2}(1-\cos u)\Rightarrow y'=\frac{c_1}{2}\sin u\,.\,u'$$

$$\frac{c_1^2}{4}\sin^2u\,.\,u'^2=\frac{c_1-\frac{c_1}{2}(1-\cos u)}{\frac{c_1}{2}(1-\cos u)}=\frac{\frac{c_1}{2}(1+\cos u)}{\frac{c_1}{2}(1-\cos u)}=\frac{1+\cos u}{1-\cos u}$$

$$\frac{c_1^2}{4}u'^2(1-\cos u)(1+\cos u)=\frac{1+\cos u}{1-\cos u}$$

$$\frac{c_1^2}{4}u'^2=\frac{1}{(1-\cos u)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{c_1}{2}u'=\frac{1}{1-\cos u}$$

$$\pm\frac{c_1}{2}(1-\cos u)\,du=dx$$

$$x=\pm\frac{c_1}{2}(u-\sin u)+c_2$$

بالتالي التوابع المطلوبة تعطى بالشكل

$$\begin{cases} y=\frac{c_1}{2}(1-\cos u) \\ x=\pm\frac{c_1}{2}(u-\sin u)+c_2 \end{cases}$$

• من هنا يتضح ان الاوضاع القصوى للتابعي $J$ هي سيكلوئيدات

Scanned by CamScanner